Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1911.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg).

Объ одномъ случаѣ испытаній, связанныхъ въ сложную цѣпь.

А. А. Маркова.

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 19 января 1911 г.).

Въ концѣ статьи «Распространеніе предѣльныхъ теоремъ исчисленія вѣроятностей на сумму величинъ, связанныхъ въ цѣпь»[1]) мною было уже указано, что предѣльныя теоремы исчисленія вѣроятностей можно распространить и на сложныя цѣпи. Но съ увеличеніемъ числа непосредственно связанныхъ элементовъ возрастаетъ не столько значеніе окончательнаго результата, сколько сложность его и приводящихъ къ нему вычисленій, если только мы не поставимъ себѣ спеціально цѣлью разыскать такіе случаи, гдѣ значительная общность соединяется съ особою простотою результата.

Одинъ изъ такихъ случаевъ я и предполагаю отмѣтить въ настоящей статьѣ. При этомъ я имѣю въ виду также указать на одно обстоятельство, которое для простой однородной цѣпи не имѣетъ мѣста, а для сложной цѣпи, которую слѣдуетъ охарактеризовать названіемъ однородной, оказывается возможнымъ. А именно, изъ моей статьи «Изслѣдованіе замѣчательнаго случая зависимыхъ испытаній»[2]) видно, что для простой цѣпи испытаній дисперсія, опредѣляемая выраженіемъ

$$\sqrt{2pq\,\frac{1+\delta}{1-\delta}\,n},$$

не можетъ быть нормальной, т. е. невозможно равенство

$$\sqrt{2pq\,\frac{1+\delta}{1-\delta}\,n} = \sqrt{2pqn},$$

1) «Записки» Академіи Наукъ, VIII серія, т. XXII.
2) «Извѣстія» Академіи Наукъ. 1907 г.

если только δ не нуль, иначе сказать, если испытанія, дѣйствительно, связаны другъ съ другомъ, а не являются независимыми. Для сложной же цѣпи испытаній дисперсія можетъ быть нормальной.

Такимъ образомъ, предѣльное выраженіе вѣроятности для испытаній, связанныхъ въ однородную сложную цѣпь, можетъ вполнѣ совпадать съ соотвѣтствующимъ выраженіемъ вѣроятности для простого случая Бернулли.

§ 1. Мы будемъ разсматривать вопросъ о числѣ появленій нѣкотораго событія E при извѣстномъ числѣ послѣдовательныхъ испытаній, связанныхъ между собой такимъ образомъ, что выполняются слѣдующія условія.

I. Вѣроятность событія E при каждомъ испытаніи имѣетъ одну и ту же величину p, пока результаты ихъ вообще остаются неопредѣленными.

II. Вѣроятность событія E при каждомъ испытаніи, если установленъ только результатъ предшествующаго испытанія, имѣетъ одно изъ двухъ значеній

$$p_1, \quad p_0,$$

смотря по тому, появилось ли E при предшествующемъ испытаніи, или, напротивъ, появилось противоположное событіе, которое мы обозначаемъ буквою F.

III. Наконецъ, если установленъ результатъ

$$EE, \quad EF, \quad FE, \quad FF$$

двухъ испытаній, предшествующихъ разсматриваемому, то вѣроятность событія E, при этомъ испытаніи, принимаетъ соотвѣтственно значенія

$$p_{11}, \quad p_{10}, \quad p_{01}, \quad p_{00};$$

эти послѣднія величины вѣроятности остаются неизмѣнными и по выясненіи результатовъ прочихъ испытаній, предшествующихъ разсматриваемому, но не слѣдующихъ за нимъ.

Такимъ образомъ, каждое испытаніе непосредственно связано съ двумя предшествующими.

Введенныя нами вѣроятности событія E

$$p, \quad p_1, \quad p_0, \quad p_{11}, \quad p_{10}, \quad p_{01}, \quad p_{00},$$

къ которымъ мы присоединимъ еще соотвѣтствующія вѣроятности событія F

$$q = 1 - p, \quad q_1 = 1 - p_1, \quad q_0 = 1 - p_0,$$

$$q_{11} = 1 - p_{11}, \quad q_{10} = 1 - p_{10}, \quad q_{01} = 1 - p_{01}, \quad q_{00} = 1 - p_{00},$$

не могутъ быть заданы всѣ произвольно; въ силу поставленныхъ нами условій онѣ связаны нѣкоторыми простыми соотношеніями.

Выводъ этихъ соотношеній не представляетъ большихъ затрудненій. И прежде всего не трудно установить равенство

$$p = pp_1 + qp_0,$$

съ которымъ мы уже встрѣчались при разсмотрѣніи простой цѣпи.

Удовлетворяя ему, мы подобно прежнему полагаемъ

$$p_1 = p + \delta q, \quad q_1 = q - \delta q,$$
$$p_0 = p - \delta p, \quad q_0 = q + \delta p.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ важно вспомнить, что вышеуказанное равенство равносильно слѣдующему

$$pq_1 = qp_0$$

и что при соблюденіи его числа

$$p_1 \text{ и } p_0,$$

въ силу основныхъ предложеній исчисленія вѣроятностей, оказываются вѣроятностями событія E при любомъ испытаніи, когда установленъ, соотвѣтствующимъ образомъ, результатъ не предшествующаго испытанія, какъ мы раньше предполагали, а послѣдующаго. Такимъ образомъ намѣчается возможность повернуть нашъ рядъ испытаній въ обратную сторону; эта возможность вполнѣ установится, когда мы разберемъ всѣ наши условія.

Для вывода другихъ соотношеній между вышеуказанными вѣроятностями мы предположимъ, что результатъ одного испытанія

$$E \text{ или } F$$

установленъ. Тогда для обоихъ смежныхъ испытаній вѣроятность появленія событія E имѣетъ одну и ту же величину

$$p_1 \text{ или } p_0.$$

Съ другой стороны, вѣроятность событія E при испытаніи слѣдующимъ за тѣмъ, результатъ котораго данъ, мы можемъ вычислять при помощи чиселъ

$$p_{11}, \quad p_{10}, \quad p_{01}, \quad p_{00},$$

на основаніи теоремъ сложенія и умноженія вѣроятностей, принимая во вниманіе возможные результаты предшествующаго испытанія и ихъ вѣроятности. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ двумъ равенствамъ

$$p_1 = p_1 p_{11} + q_1 p_{01},$$

$$p_0 = p_0 p_{10} + q_0 p_{00},$$

которыя равносильны слѣдующимъ

$$p_1 q_{11} = q_1 p_{01} \quad \text{и} \quad p_0 q_{10} = q_0 p_{00};$$

удовлетворяя имъ, мы вводимъ два новыхъ числа

$$\varepsilon \quad \text{и} \quad \eta$$

и полагаемъ

$$q_{11} = q_1 (1 - \varepsilon), \quad p_{01} = p_1 (1 - \varepsilon), \quad q_{10} = q_0 (1 - \eta), \quad p_{00} = p_0 (1 - \eta)$$

$$p_{11} = p_1 + \varepsilon q_1, \quad q_{01} = q_1 + \varepsilon p_1, \quad p_{10} = p_0 + \eta q_0, \quad q_{00} = q_0 + \eta p_0.$$

По установленіи этихъ формулъ, наше предположеніе о постоянствѣ вѣроятностей

$$p, \ p_1, \ p_0$$

во всей цѣпи будетъ выполнено; не трудно также убѣдиться, что нашу цѣпь можно разсматривать въ направленіи, обратномъ принятому нами, но послѣднее обстоятельство не имѣетъ значенія для нашего изслѣдованія.

Итакъ, въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ предполагать, что вѣроятности

$$p_1, \ q_1, \ p_0, \ q_0, \ldots, \ p_{00}, \ q_{00}$$

опредѣляются по числамъ

$$p, \ q = 1 - p, \ \delta, \ \varepsilon, \ \eta$$

выше приведенными формулами.

§ 2. Обращаясь къ вопросу о вѣроятности различныхъ предположеній о числѣ появленій событія E въ n первыхъ испытаній, разсматриваемыхъ нами, мы должны ввести рядъ обозначеній.

Вѣроятность

$$P_{m,n},$$

событію E въ n первыхъ[1]) испытаній появиться ровно m разъ, мы разбиваемъ на четыре части

$$P_{m,n}^{1,1},\quad P_{m,n}^{1,0},\quad P_{m,n}^{0,1},\quad P_{m,n}^{0,0},$$

каждая изъ которыхъ представляетъ подобную же вѣроятность, но по присоединеніи требованія, чтобы послѣднія два испытанія приводили, соотвѣтственно, къ опредѣленнымъ результатамъ

$$EE,\quad EF,\quad FE,\quad FF.$$

При такихъ обозначеніяхъ не трудно установить слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned}
P_{m,n} &= P_{m,n}^{1,1} + P_{m,n}^{1,0} + P_{m,n}^{0,1} + P_{m,n}^{0,0},\\
P_{m,n}^{1,1} &= p_{11}\, P_{m-1,n-1}^{1,1} + p_{01}\, P_{m-1,n-1}^{0,1},\\
P_{m,n}^{1,0} &= q_{11}\, P_{m,n-1}^{1,1} + q_{01}\, P_{m,n-1}^{0,1},\\
P_{m,n}^{0,1} &= p_{10}\, P_{m-1,n-1}^{1,0} + p_{00}\, P_{m-1,n-1}^{0,0}\\
P_{m,n}^{0,0} &= q_{10}\, P_{m,n-1}^{1,0} + q_{00}\, P_{m,n-1}^{0,0}.
\end{aligned}$$

Введя же затѣмъ вспомогательное перемѣнное число ξ и разсматривая его функціи

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \sum P_{m,n}\,\xi^m = \varphi_n^{1,1} + \varphi_n^{1,0} + \varphi_n^{0,1} + \varphi_n^{0,0},\\
\varphi_n^{1,1} &= \sum P_{m,n}^{1,1}\,\xi^m, \quad \varphi_n^{1,0} = \sum P_{m,n}^{1,0}\,\xi^m,\\
\varphi_n^{0,1} &= \sum P_{m,n}^{0,1}\,\xi^m, \quad \varphi_n^{0,0} = \sum P_{m,n}^{0,0}\,\xi^m,
\end{aligned}$$

мы можемъ изъ вышеприведенныхъ формулъ вывести такія уравненія

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{1,1} &= p_{11}\,\xi\,\varphi_{n-1}^{1,1} + p_{01}\,\xi\,\varphi_{n-1}^{0,1},\\
\varphi_n^{1,0} &= q_{11}\,\varphi_{n-1}^{1,1} + q_{01}\,\varphi_{n-1}^{0,1},\\
\varphi_n^{0,1} &= p_{10}\,\xi\,\varphi_{n-1}^{1,0} + p_{00}\,\xi\,\varphi_{n-1}^{0,0},\\
\varphi_n^{0,0} &= q_{10}\,\varphi_{n-1}^{1,0} + q_{00}\,\varphi_{n-1}^{0,0};
\end{aligned}$$

1) Наши выводы относятся не только къ n первымъ испытаніямъ, но и вообще къ n послѣдовательнымъ испытаніямъ.

а на основаніи ихъ не трудно придти [1]) къ обыкновенному линейному уравненію въ конечныхъ разностяхъ, которое въ символическомъ видѣ можно, при помощи опредѣлителей, представить такъ

$$\begin{vmatrix} p_{11}\xi - \varphi, & 0, & p_{01}\xi, & 0 \\ q_{11}, & -\varphi, & q_{01}, & 0 \\ 0, & p_{10}\xi, & -\varphi, & p_{00}\xi \\ 0, & q_{10}, & 0, & q_{00} - \varphi \end{vmatrix} \varphi^n = 0.$$

Послѣднее же уравненіе даетъ намъ возможность опредѣлить φ_n, какъ коэффиціентъ при t^n въ разложеніи нѣкоторой раціональной дробной функціи новаго вспомогательнаго перемѣннаго t, по возрастающимъ степенямъ его, при чемъ знаменателемъ для этой дробной функціи служитъ

$$F(\xi, t) = \begin{vmatrix} p_{11}\xi t - 1, & 0, & p_{01}\xi t, & 0 \\ q_{11}t, & -1, & q_{01}t, & 0 \\ 0, & p_{10}\xi t, & -1, & p_{00}\xi t \\ 0, & q_{10}t, & 0, & q_{00}t - 1 \end{vmatrix}.$$

Итакъ мы имѣемъ

$$1 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \ldots + \varphi_n t^n + \ldots = \frac{f(\xi, t)}{F(\xi, t)},$$

гдѣ

$$f(\xi, t) \text{ и } F(\xi, t)$$

цѣлыя функціи вспомогательныхъ перемѣнныхъ ξ и t и вторая изъ нихъ опредѣляется установленной нами формулой.

§ 3. Выводъ предѣльнаго выраженія вѣроятности можно основать, какъ выяснено въ вышеуказанной моей работѣ, на разсмотрѣніи цѣлой функціи $F(\xi, t)$.

Что же касается другой цѣлой функціи $f(\xi, t)$, то составить ее, конечно, не трудно, но для нашей цѣли нѣтъ надобности на ней останавливаться.

Разсматривая разложеніе цѣлой функціи

$$F(1, t)$$

на множители первой степени

$$F(1, t) = (1 - \alpha_1 t)\ (1 - \alpha_2 t)\ (1 - \alpha_3 t)\ (1 - \alpha_4 t)$$

1) Исчисленіе конечныхъ разностей. Второе изданіе. Отдѣлъ второй. § 28.

и примѣняя указанные ранѣе пріемы, мы легко убѣждаемся, что одно изъ чиселъ

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4$$

равно единицѣ, а модули остальныхъ меньше единицы. И затѣмъ, на основаніи прежнихъ изслѣдованій, тотчасъ можемъ заключить, что для любыхъ данныхъ чиселъ

$$u_1, \ u_2$$

извѣстный интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2} dx$$

выражаетъ предѣльное значеніе вѣроятности числу появленій событія E, при n послѣдовательныхъ испытаніяхъ, заключаться между

$$n a + u_1 \sqrt{2 b n} \text{ и } n a + u_2 \sqrt{2 b n},$$

гдѣ

$$a = \frac{F'_{\xi=1}(\xi, 1)}{F'_{t=1}(1, t)}, \ b = \frac{F''_{\omega=0}(e^{\omega}, e^{-a\omega})}{F'_{t=1}(1, t)}.$$

Такимъ образомъ вся наша задача сводится къ разсмотрѣнію выраженій a и b.

Для удобства вычисленій, которыя мы проведемъ съ надлежащею подробностью, чтобы ихъ легко было провѣрить, введемъ вмѣсто ξ новое перемѣнное число z, связанное съ ξ и t равенствомъ

$$\xi t = z.$$

Тогда $F(\xi, t)$ превратится въ

$$\Phi(z, t) = \begin{vmatrix} p_{11} z - 1, & 0 & , p_{01} z, & 0 \\ q_{11} t & , -1, & q_{01} t, & 0 \\ 0 & , p_{10} z, & -1, & p_{00} z \\ 0 & , q_{10} t, & 0 & , q_{00} t - 1 \end{vmatrix}.$$

Выражая производныя

$$F'_{\xi=1}(\xi, 1), \ F'_{t=1}(1, t), \ F''_{\omega=0}(e^{\omega}, e^{-a\omega})$$

черезъ производныя функціи $\Phi(z, t)$ по z и по t, получаемъ

$$F'_{\xi=1}(\xi, 1) = \Phi'_{z=1}(z, 1)$$
$$F'_{t=1}(1, t) = \Phi'_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{t=1}(1, t)$$
$$F''_{\omega=0}(e^{\omega}, e^{-a\omega}) = \Phi''_{\omega=0}(e^{(1-a)\omega}, e^{-a\omega})$$

и затѣмъ

$$\Phi''_{\omega=0}(e^{(1-a)\omega}, e^{-a\omega}) = (1-a)^2 \left\{\Phi''_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{z=1}(z, 1)\right\}$$
$$+ a^2 \left\{\Phi''_{t=1}(1, t) + \Phi'_{t=1}(1, t)\right\}$$
$$- 2a(1-a) \left\{\frac{d^2\Phi(z, t)}{dz\,dt}\right\}_{z=t=1}.$$

Остается произвести выкладки, которыя нѣсколько сложны, но не трудны; замѣтимъ, что эти выкладки между прочимъ должны подтвердить, что a равняется p.

Располагая функцію $\Phi(z, t)$, равную

$$(1-p_{11}z)\,(1-q_{00}t) - p_{10}z\,(p_{11}z-1)\,q_{01}t\,(q_{00}t-1) - q_{11}t\,q_{10}t\,p_{01}z\,p_{00}z$$
$$+ q_{10}t\,(p_{11}z-1)\,q_{01}t\,p_{00}z + q_{11}t\,p_{10}z\,p_{01}z\,(q_{00}t-1),$$

по степенямъ z и t, получаемъ

$$\Phi(z, t) = Az^2t^2 + Bz^2t + Czt^2 + Dzt + Gz + Ht + 1,$$

гдѣ

$$A = q_{10}p_{11}q_{01}p_{00} - p_{10}p_{11}q_{01}q_{00} + q_{11}p_{10}p_{01}q_{00} - q_{11}q_{10}p_{01}p_{00}$$
$$= (p_{11}q_{01} - q_{11}p_{01})\,(q_{10}p_{00} - p_{10}q_{00}) = (p_{11} - p_{01})\,(p_{00} - p_{10}) = -\varepsilon\eta,$$
$$B = p_{10}p_{11}q_{01} - q_{11}p_{10}p_{01} = p_{10}\,(p_{11}q_{01} - q_{11}p_{01}) = \varepsilon p_{10},$$
$$C = p_{10}q_{01}q_{00} - q_{10}q_{01}p_{00} = q_{01}\,(p_{10}q_{00} - q_{10}p_{00}) = \eta q_{01},$$
$$D = p_{11}q_{00} - p_{10}q_{01} = (1 - q_{11})\,(1 - p_{00}) - (p_{00} + \eta)\,(q_{11} + \varepsilon)$$
$$= 1 - \varepsilon\eta - (1+\eta)\,q_{11} - (1+\varepsilon)\,p_{00},$$
$$G = -p_{11}, \quad H = -q_{00}.$$

По этимъ величинамъ коэффиціентовъ функціи $\Phi(z, t)$ легко провѣряется равенство

$$A + B + C + D + G + H + 1 = 0,$$

согласно которому

$$\Phi(1, 1) = 0.$$

Затѣмъ простыя выкладки даютъ намъ

$$\Phi'_{z=1}(z, 1) = 2A + 2B + C + D + G = A + B - H - 1 =$$

$$= \varepsilon(p_{10} - \eta) - p_{00} = -p_{00}(1-\varepsilon) = -p(1-\delta)(1-\varepsilon)(1-\eta),$$

$$\Phi'_{t=1}(1, t) = 2A + B + 2C + D + H = A + C - G - 1$$

$$= \eta(q_{01} - \varepsilon) - q_{11} = -q_{11}(1-\eta) = -q(1-\delta)(1-\varepsilon)(1-\eta),$$

$$\Phi'_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{t=1}(1, t) = -(1-\delta)(1-\varepsilon)(1-\eta)$$

$$\Phi''_{z=1}(z, 1) = 2A + 2B = 2\varepsilon p_{00}, \quad \Phi''_{t=1}(1, t) = 2A + 2C = 2\eta q_{11},$$

$$\Phi''_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{z=1}(z, 1) = -(1-3\varepsilon)p_{00} = -p(1-3\varepsilon)(1-\delta)(1-\eta),$$

$$\Phi''_{t=1}(1, t) + \Phi'_{t=1}(1, t) = -(1-3\eta)q_{11} = -q(1-3\eta)(1-\delta)(1-\varepsilon),$$

$$\left\{\frac{d^2\Phi(z, t)}{dz\,dt}\right\}_{z=t=1} = 4A + 2B + 2C + D$$

$$= 2\varepsilon p_{00} + 2\eta q_{11} + 1 - \varepsilon\eta - (1+\eta)q_{11} - (1+\varepsilon)p_{00}$$

$$= 1 - \varepsilon\eta - (1-\eta)q_{11} - (1-\varepsilon)p_{00}$$

$$= 1 - \varepsilon\eta - (1-\delta)(1-\varepsilon)(1-\eta)$$

и наконецъ

$$a = \frac{-p(1-\delta)(1-\varepsilon)(1-\eta)}{-(1-\delta)(1-\varepsilon)(1-\eta)} = p, \quad 1 - a = q,$$

$$b = pq\frac{\{q(1-3\varepsilon)(1-\eta) + p(1-3\eta)(1-\varepsilon) - 2(1-\varepsilon)(1-\eta)\}(1-\delta) + 2(1-\varepsilon\eta)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)(1-\eta)}.$$

Стремясь къ возможно простѣйшимъ выводамъ, мы положимъ еще

$$\varepsilon = \eta;$$

тогда по сокращеніи послѣдней дроби на

$$1 - \varepsilon = 1 - \eta$$

получимъ

$$b = pq\frac{-(1-\delta)(1+\varepsilon) + 2(1+\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)} = pq\frac{(1+\delta)(1+\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)}.$$

Итакъ если для разсматриваемыхъ нами послѣдовательныхъ испытаній имѣемъ

$$p_1 = p + \delta q,\ q_1 = q - \delta q,\ p_0 = p - \delta p,\ q_0 = q + \delta p$$

$$p_{11} = p_1 + \varepsilon q_1,\ p_{01} = p_1 - \varepsilon p_1,\ p_{10} = p_0 + \varepsilon q_0,\ p_{00} = p_0 - \varepsilon p_0$$

$$q_{11} = q_1 - \varepsilon q_1,\ q_{01} = q_1 + \varepsilon p_1,\ q_{10} = q_0 - \varepsilon q_0,\ q_{00} = q_0 + \varepsilon p_0,$$

то вѣроятность неравенствъ

$$np + u_1 \sqrt{2npq\frac{(1+\delta)(1+\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)}} < m < np + u_2 \sqrt{2npq\frac{(1+\delta)(1+\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)}},$$

гдѣ u_1 и u_2 любыя данныя числа, должна приближаться къ предѣлу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2}\, dx,$$

когда число n станетъ возрастатъ безпредѣльно.

Пусть наконецъ

$$\varepsilon = -\delta.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$p_{11} = p + \delta^2 q,\ p_{01} = p_{11} + \delta,\ p_{10} = p_{00} - \delta,\ p_{00} = p - \delta^2 p$$

$$q_{11} = q - \delta^3 q,\ q_{01} = q_{11} - \delta,\ q_{10} = q_{00} + \delta,\ q_{00} = q + \delta^2 p$$

и можемъ утверждать, что извѣстный интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2}\, dx$$

служитъ предѣломъ для вѣроятности неравенствъ

$$np + u_1 \sqrt{2npq} < m < np + u_2 \sqrt{2npq},$$

при безпредѣльномъ возрастаніи числа испытаній n.

Такимъ образомъ мы, дѣйствительно, пришли къ случаямъ, гдѣ предѣльное выраженіе вѣроятности для связанныхъ испытаній вполнѣ совпадаетъ съ соотвѣтствующимъ выраженіемъ вѣроятности для независимыхъ испытаній съ постоянною вѣроятностью.

§ 4. Останавливаясь на предположеніи

$$\varepsilon = \eta,$$

при которомъ мы получили для b замѣчательно простое выраженіе

$$b = \frac{(1+\delta)(1+\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)} pq,$$

постараемся найти тоже выраженіе другимъ способомъ, который былъ уже нами примѣненъ для подобной же цѣли въ замѣткѣ[1]) «Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга».

Какъ извѣстно, b равняется предѣлу, къ которому стремится отношеніе

$$\frac{\text{мат. ож. } (m - np)^2}{n}$$

при безпредѣльномъ возрастаніи числа n.

Выражая же m извѣстною суммою

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

и полагая для краткости

$$x_k - p = v_k,$$

имѣемъ

$$\text{мат. ож. } v_k = 0, \text{ мат. ож. } v_k^2 = pq,$$

$$\text{мат. ож. } (m - np)^2 = \text{мат. ож. } (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)^2 =$$

$$= \text{мат. ож. } v_1^2 + \text{мат. ож. } v_2 (v_2 + 2v_1) + \ldots + \text{м. о. } v_n (v_n + 2v_{n-1} + \ldots + 2v_1) =$$

$$= \sum \text{мат. ож. } v_k (v_k + 2v_{k-1} + 2v_{k-2} + \ldots + 2v_1).$$

Съ другой стороны, согласно объясненіямъ только что упомянутой замѣтки имѣемъ

$$\text{мат. ож. } v_k v_{k-i} = p(R_i - p) = pq\Delta_i,$$

гдѣ R_i означаетъ вѣроятность событія E при k-мъ испытаніи, когда появленіе событія E при $k-i$-мъ испытаніи установлено.

Такимъ образомъ вопросъ о величинѣ b мы можемъ свести къ разысканію предѣла суммы

$$1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + \ldots + 2\Delta_{k-1},$$

при безпредѣльномъ возрастаніи числа k; въ самомъ дѣлѣ, если безконечная сумма

$$1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \ldots$$

1) Извѣстія Физ.-Мат. Общества при Казанскомъ Унив. за 1907 годъ.

имѣетъ смыслъ, не трудно, на основаніи вышеприведенныхъ формулъ, установить равенство

$$b = pq\,(1 + 2\,\Delta_1 + 2\,\Delta_2 + 2\,\Delta_3 + \ldots).$$

Приступая къ разсмотрѣнію слагаемыхъ этой суммы, вводимъ четыре вѣроятности

$$R_i^{11},\ \ R_i^{10},\ \ R_i^{01},\ \ R_i^{00}$$

событію E появиться при k-мъ испытаніи соотвѣтственно четыремъ возможнымъ результатамъ

$$EE,\ \ EF,\ \ FE,\ \ FF$$

испытаній съ нумерами $k - i$ и $k - i + 1$.

При такихъ обозначеніяхъ имѣемъ

$$R_0 = 1\,,\ \ R_0^{1,1} = 1,\ \ R_0^{1,0} = 1,\ \ R_0^{0,1} = 0,\ \ R_0^{0,0} = 0,$$

$$R_1 = p_1,\ \ R_1^{1,1} = 1,\ \ R_1^{1,0} = 0,\ \ R_1^{0,1} = 1,\ \ R_1^{0,0} = 0,$$

$$R_i = p_1 R_i^{1,1} + q_1 R_i^{1,0}$$

и не трудно установить четыре уравненія

$$R_{i+1}^{1,1} = p_{11}\ \ R_i^{1,1} + q_{11}\ \ R_i^{1,0},$$

$$R_{i+1}^{1,0} = p_{10}\ \ R_i^{0,1} + q_{10}\ \ R_i^{0,0},$$

$$R_{i+1}^{0,1} = p_{01}\ \ R_i^{1,1} + q_{01}\ \ R_i^{1,0},$$

$$R_{i+1}^{0,0} = p_{00}\ \ R_i^{0,1} + q_{00}\ \ R_i^{0,0},$$

а изъ нихъ вытекаетъ для R_i линейное уравненіе въ конечныхъ разностяхъ четвертаго порядка, которое символически можно представить такъ

$$\begin{vmatrix} p_{11} - R, & q_{11}\,, & 0\ , & 0 \\ 0\ , & -R, & p_{10}\,, & q_{10} \\ p_{01}\ , & q_{0,1}\,, & -R, & 0 \\ 0\ , & 0\ , & p_{00}\,, & q_{00} - R \end{vmatrix} R^i = 0.$$

Разсматривая соотвѣтственно этому уравненію въ конечныхъ разностяхъ обыкновенное алгебраическое уравненіе

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho, & q_{11}, & 0, & 0 \\ 0, & -\rho, & p_{10}, & q_{10} \\ p_{01}, & q_{01}, & -\rho, & 0 \\ 0, & 0, & p_{00}, & q_{00}-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

замѣчаемъ, что одинъ изъ корней его равенъ единицѣ, а остальные три удовлетворяютъ уравненію

$$\begin{vmatrix} -\rho-q_{11}, & p_{10}, & q_{10} \\ q_{01}-q_{11}, & -\rho, & 0 \\ -q_{11}, & p_{00}, & q_{00}-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

которое по выполненіи выкладокъ приводится къ такому

$$\rho^3-(\delta+\varepsilon-\varepsilon\delta)\ \rho^2-\varepsilon\ (1-\delta+\varepsilon\delta)\ \rho+\varepsilon^2=0.$$

Одинъ изъ корней послѣдняго уравненія равенъ ε, а остальные два удовлетворяютъ уравненію второй степени

$$\rho^2-\delta\ (1-\varepsilon)\ \rho-\varepsilon=0.$$

Поэтому мы можемъ положить

$$R_i=a+b\,\varepsilon^i+r_i,$$

гдѣ r_i удовлетворяетъ уравненію второго порядка

$$r_{i+2}-\delta\ (1-\varepsilon)\ r_{i+1}-\varepsilon r_i=0,$$

буквы же a и b означаютъ постоянныя числа.

Относительно a не трудно заключить, что оно равняется p, такъ какъ при безпредѣльномъ возрастаніи i всѣ выраженія

$$R_i^{11},\quad R_i^{10},\quad R_i^{01},\quad R_i^{00}$$

должны стремиться къ общему предѣлу p; слѣдовательно

$$q\Delta_i = R_i - p = b\,\varepsilon^i + r_i.$$

Затѣмъ не трудно убѣдиться, что b равно нулю.

Для этой цѣли разсматриваемъ

$$q\Delta_0 = 1 - p = q, \quad q\Delta_1 = p_1 - p = \delta q$$

$$q\Delta_2 = p_1 p_{11} + q_1 p_{10} - p = p_{11} + q_1 (p_{10} - p_{11}) - p = q\ (\varepsilon + \delta^2 (1 - \varepsilon))$$

$$q\Delta_3 = p_1 p_{11} p_{11} + p_1 q_{11} p_{10} + q_1 p_{10} p_{01} + q_1 q_{10} p_{00} - p$$

$$= p_1 - p + p_1 q_{11} (p_{10} - p_{11}) - p_1 q_{11} + q_1 p_{01} + q_1 q_{10} (p_{00} - p_{01})$$

$$= \delta q + q_1 (p_{01} + q_{10}) (p_0 - p_1) (1 - \varepsilon) = \delta q \left\{1 - (1 - \delta^2)(1 - \varepsilon)^2\right\}$$

и замѣчаемъ, что полученныя нами выраженія

$$\Delta_0, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$$

удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta_2 - \delta\ (1 - \varepsilon)\ \Delta_1 - \varepsilon\,\Delta_0 = 0$$

и

$$\Delta_3 - \delta\ (1 - \varepsilon)\ \Delta_2 - \varepsilon\,\Delta_1 = 0$$

каждое изъ которыхъ требуетъ равенства

$$b = 0.$$

Установивъ такимъ образомъ, что Δ_i удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_{i+2} - \delta\ (1 - \varepsilon)\ \Delta_{i+1} - \varepsilon\,\Delta_i = 0,$$

мы можемъ, введя новое вспомогательное перемѣнное y и разсматривая его функцію

$$\Delta_1 + \Delta_2 y + \Delta_3 y^2 + \ldots = \sum \Delta_i y^{i-1}$$

написать формулу

$$\sum \Delta_i\, y^{i-1} = \frac{A + By}{1 - \delta\,(1 - \varepsilon)\, y - \varepsilon\, y^2},$$

гдѣ A и B числа постоянныя и легко опредѣляются равенствами

$$A = \Delta_1 = \delta, \quad B = \Delta_2 - \delta\ (1 - \varepsilon)\ \Delta_1 = \varepsilon.$$

А эта формула при

$$y = 1$$

даетъ

$$\sum \Delta_i = \frac{\delta + \varepsilon}{(1 - \delta)\ (1 - \varepsilon)}$$

и слѣдовательно

$$1 + 2\,\Delta_1 + 2\,\Delta_2 + 2\,\Delta_3 + \ldots = 1 + \frac{2\,(\delta + \varepsilon)}{(1 - \delta)\ (1 - \varepsilon)} = \frac{(1 + \delta)\ (1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)\ (1 - \varepsilon)}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ прежнему результату

$$b = \frac{(1 + \delta)\ (1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)\ (1 - \varepsilon)}\, pq.$$

§ 5. Въ заключеніе статьи остановимся на одномъ примѣрѣ испытаній, связанныхъ въ цѣпь, который, при надлежащемъ обобщеніи, можетъ вести къ многосвязнымъ цѣпямъ.

Примѣръ. Изъ сосуда, содержащаго α бѣлыхъ и β шаровъ иного цвѣта, вынимаютъ послѣдовательно шаръ за шаромъ, которые и возвращаютъ обратно въ сосудъ, но не немедленно по выходѣ изъ сосуда, а такимъ образомъ, что каждый шаръ остается внѣ сосуда, пока не вынуто двухъ слѣдующихъ за нимъ шаровъ.

Называя событіемъ E бѣлый цвѣтъ шара и разсматривая послѣдовательный рядъ шаровъ, мы имѣемъ въ данномъ примѣрѣ, какъ разъ, случай испытаній, связанныхъ въ сложную цѣпь вышеразобраннаго типа.

И не трудно опредѣлить соотвѣтствующія значенія

$$p,\ p_1,\ p_0,\ p_{11},\ p_{10},\ p_{01},\ p_{00}:$$

а именно, простыя соображенія даютъ

$$p = \frac{a}{a + b},\quad p_1 = \frac{a - 1}{a + b - 1},\quad p_0 = \frac{a}{a + b - 1},$$

$$p_{11} = \frac{a - 2}{a + b - 2},\quad p_{10} = p_{01} = \frac{a - 1}{a + b - 2},\quad p_{00} = \frac{a}{a + b - 2}.$$

Отсюда затѣмъ выводимъ

$$\delta = p_1 - p_0 = \frac{-1}{a + b - 1},\quad \varepsilon = \eta = p_{11} - p_{01} = p_{10} - p_{00} = \frac{-1}{a + b - 2}$$

и

$$pq = \frac{ab}{(a + b)^2},\quad \frac{(1 + \delta)\ (1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)\ (1 - \varepsilon)} = \frac{(a + b - 2)\ (a + b - 3)}{(a + b)\ (a + b - 1)}.$$

Итакъ, если буквою m мы обозначимъ число бѣлыхъ шаровъ среди вынутыхъ послѣдовательно n шаровъ, то на основаніи вышеизложеннаго изслѣдованія вѣроятность неравенствъ

$$u_1 \sqrt{\frac{2ab\,(a+b-2)\,(a+b-3)}{n\,(a+b)^3\,(a+b-1)}} < \frac{m}{n} - \frac{a}{a+b} < u_2 \sqrt{\frac{2ab\,(a+b-2)\,(a+b-3)}{n\,(a+b)^3\,(a+b-1)}},$$

гдѣ u_1, u_2 любыя данныя числа, должна приближаться къ предѣлу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2}\,dx,$$

при безпредѣльномъ возрастаніи числа n.